

METODA RATA-RATA BATCH PADA SIMULASI SISTEM ANTRIAN M/M/1

Ekabrata Yudhistyra

Sekolah Tinggi Manajemen Informatika dan Komputer LIKMI
Jl. Ir. H. Juanda 96 Bandung 40132

Abstract

Ada beberapa pendekatan konvensional yang umumnya dipakai orang untuk menentukan ukuran sampel pada suatu simulasi komputer. Dua diantaranya yang umum digunakan adalah metoda replikasi dan metoda rata-rata batch. Metoda replikasi yang umumnya sering digunakan ternyata dapat memberikan hasil yang tidak baik. Dalam makalah ini disimpulkan bahwa metoda rata-rata batch ternyata dapat memberikan cakupan interval kepercayaan yang lebih baik untuk ukuran sampel yang sama.

Key Word : simulasi, replikasi, sampel

I. LANDASAN TEORI

Kita definisikan $\bar{X}_j(m)$ sebagai mesin sampel dari m pengamatan untuk batch yang ke- j , atau singkatnya rata-rata batch yang ke- j . Sedangkan $\bar{\bar{X}}_j(k,m)$ dan $\hat{\sigma}^2(k,m)$ kita definisikan sama seperti pada metoda replikasi. Bedanya adalah:

- pada metoda replikasi, k = banyak replikasi, di sini k = banyak batch.
- Pada metoda replikasi, m = ukuran sampel tiap replikasi, di sini m = ukuran sampel tiap batch.

Dengan melakukan sebuah replikasi tunggal yang panjang seperti ini, kita berharap efek keadaan awal sistem yang disimulasikan terhadap $\bar{\bar{X}}_j(k,m)$ dapat dihilangkan, sehingga mengurangi biasnya sebagai estimator bagi μ . Namun dalam melakukan hal ini kita kehilangan independensi antara $\bar{X}_j(m)$. Jika kita pilih ukuran sampel m cukup besar maka dapat ditunjukkan bahwa $\bar{X}_j(m)$ untuk ($j = 1,2,\dots,k$) akan saling tidak berkorelasi. Untuk beberapa jenis proses stokastik tertentu yang

terkorelasi, ada beberapa teorema limit sentral yang menyatakan bahwa untuk m yang cukup besar $\bar{X}_j(m)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) mendekati distribusi normal.

Dengan demikian untuk m cukup besar $\bar{X}_j(m)$ dapat dianggap tidak terkorelasi dan terdistribusi normal (sifat-1).

Jika kita asumsikan X_1, X_2, \dots merupakan proses kovarian tetap dengan $E(X_i) = \mu$, maka jelaslah bahwa menurut definisi proses kovarian tetap, bahwa $\bar{X}_j(m)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) akan memiliki mean yang sama, yaitu μ dan juga varian yang sama (sifat-2).

Dari (sifat-1) dan (sifat-2) di atas jelaslah bahwa $\bar{X}_j(m)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) merupakan variabel random yang terdistribusi normal dengan mean dan varian yang sama. Oleh karena variabel random yang terdistribusi normal dapat ditentukan hanya oleh mean dan variannya saja, maka jelaslah pula bahwa $\bar{X}_j(m)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) adalah variabel random yang terdistribusi secara identik dengan mean μ (sifat-3).

Dari (sifat-1) dan (sifat-3), maka jelaslah jika ukuran cukup besar, maka kita dapat memperlakukan $\bar{X}_j(m)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) sebagai variabel random yang IID dan berdistribusi normal, dengan mean = μ . Dengan demikian 90% interval kepercayaan bagi μ dapat kita bentuk dari:

$$\bar{X}(k, m) \pm t_{k-1, 0.95} \hat{\sigma}(k, m) \quad \dots \dots \dots (1)$$

suatu bentuk rumus yang sama seperti yang digunakan pada metoda replikasi.

Akan tetapi ada beberapa kesalahan yang dapat terjadi dalam menggunakan rumus (1) di atas untuk memperoleh 90% interval kepercayaan bagi μ , bila ukuran m terlalu kecil, yaitu:

1. Estimasi yang bias pada $\hat{\sigma}(k, m)$ sebab adanya autokorelasi diantara rata-rata batch.
2. $\bar{X}_j(m)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) tidak terdistribusi normal.
3. X_i pada umumnya tidak bersifat kovarian tetap.

Untuk simulasi sistem antrian M/M/1 yang akan kita lakukan dan akan dibentuk 90% interval kepercayaannya dengan metoda rata-rata batch ini, maka menurut Law dan Kelton :

- Kesalahan yang sangat potensial adalah kesalahan yang pertama, yaitu bias pada $\hat{\sigma}(k, m)$ karena adanya autokorelasi diantara rata-rata batch.
- Kesalahan yang kedua dapat kita hindarkan bila kita mengambil k cukup besar, katakanlah $k = 40$ (*dalil limit sentral*).
- Kesalahan yang ketiga, untuk sistem antrian M/M/1 telah dibuktikan oleh Law dan Kelton bahwa *jika i cukup besar maka X_{i+1}, X_{i+2}, \dots dapat dianggap bersifat kovarian tetap.*

II. HASIL PERCOBAAN

Untuk sistem antrian M/M/1 dan $\rho=0.5$, kita lakukan 100 kali simulasi dengan banyak pengamatan tiap simulasi kita ambil 2000 dan 3600 buah. Banyak pengamatan ini kita bagi atas 40 batch, agar $\bar{X}_j(m)$ ($j = 1, 2, \dots, 40$) dapat *dianggap* berdistribusi normal. Perhatikan bahwa total pengamatan yang harus dikumpulkan pada metoda rata-rata batch ini diambil sama dengan untuk metoda replikasi yaitu banyak replikasi = 40, ukuran sampel = 50 dan 90 sehingga banyak pengamatan seluruhnya 2000 (40×50) dan 3600 (40×90).

Hal ini dimaksudkan untuk melihat bahwa jika kita memiliki banyak pengamatan yang terbatas atau dengan kata lain dengan banyak pengamatan yang sama, metoda mana yang sebaiknya kita gunakan.

Dari *tabel-1*, yaitu untuk jumlah pengamatan sebanyak 2000 buah, kita peroleh bahwa dari 100 buah 90% interval kepercayaan yang terbentuk ternyata hanya 76 buah (proporsinya = 76%) yang mengandung waktu tunggu rata-rata analitik $d = 0.5$. Sedangkan dari *tabel-2*, yaitu untuk jumlah pengamatan sebanyak 3600 buah, kita peroleh 89 buah (proporsinya = 89%) interval kepercayaan yang mengandung d .

90% interval kepercayaan bagi nilai proporsi ini dapat kita lihat pada tabel berikut:

Banyak batch	Ukuran batch	90% interval kepercayaan bagi \hat{p}
40	50	0.76 ± 0.07
40	90	0.89 ± 0.05

Ternyata untuk total pengamatan sebanyak 2000, 90% interval kepercayaan yang dibentuk bagi proporsi 90% interval kepercayaan yang mengandung waktu tunggu rata-rata dalam antrian yang dihitung dengan metoda rata-rata batch ini tidak mengandung 0.9 (90%) seperti yang diinginkan.

Namun untuk total pengamatan sebanyak 3600, 90% interval kepercayaan yang dibentuk bagi proporsi tersebut mengandung 0.9 (90%), jadi hasilnya cukup baik.

METODA BATCH

Banyak batch tiap simulasi : 40

Banyak pengamatan tiap batch : 50

SIMULASI KE	90% INTERVAL KEPERCAYAAN	WAKTU TUNGGU RATA-RATA	PRESISI RELATIF
1	[.4226772, .6018912]	.5122842	.1749166
2	[.4087116, .5956391]	.5021753	.1861178
3	[.4318351, .6087883]	.5203117	.1700454
4	[.365963, .5320102]	.4489866	.1849134
5	[.3701003, .5216848]	.4458925	.1699787
6	[.3686684, .5122661]	.4404673	.1630061
7	[.3843768, .5242463]	.4543116	.1539357
8	[.3964783, .5373261]	.4669022	.1508323
9	[.4243987, .5741635]	.4992811	.1499804
10	[.4553313, .6796867]	.567509	.1976668
11	[.500544, .7572308]	.6288874	.2040801
12	[.411173, .5819683]	.4965707	.1719748
13	[.3780296, .5443323]	.4611809	.1803009
14	[.3561417, .4591169]	.4076293	.1263099
15	[.3582588, .5003801]	.4293194	.1655193
16	[.3062307, .4291435]	.3676871	.1671432
17	[.3765962, .5270713]	.4518337	.1665161
18	[.4358715, .5904424]	.513157	.1506079
19	[.3750539, .5130769]	.4440654	.1554083
20	[.4025967, .573158]	.4878773	.1747994
21	[.3686673, .5214363]	.4450518	.1716306
22	[.4355652, .6165525]	.5260589	.1720219
23	[.443688, .6221019]	.5328949	.1674007
24	[.4524551, .6746789]	.563567	.1971582
25	[.3892358, .555845]	.4725404	.176291
26	[.3697088, .5299587]	.4498338	.1781213
27	[.4894332, .665174]	.5773036	.1522083
28	[.4613963, .6782475]	.5698218	.1902798
29	[.3931112, .5392959]	.4662035	.156782
30	[.4320891, .5783705]	.5052298	.1447672
31	[.4311467, .6076291]	.5193879	.1698945
32	[.4197029, .618524]	.5191134	.1915006
33	[.3895458, .5807276]	.4851367	.1970392
34	[.3928984, .5151734]	.4540359	.1346535
35	[.3505728, .4909856]	.4207792	.1668485
36	[.4112798, .5563106]	.4837952	.1498887
37	[.3349876, .4628034]	.3988955	.1602122
38	[.4660667, .6754652]	.5707659	.1834364
39	[.3709646, .5532414]	.462103	.1972253
40	[.4072301, .5790812]	.4931556	.1742362
41	[.3548863, .5080006]	.4314435	.1774442
42	[.3980721, .5707731]	.4844226	.1782545

Tabel-1a

Banyak batch tiap simulasi : 40

Banyak pengamatan tiap batch : 50

SIMULASI KE	90% INTERVAL KEPERCAYAAN	WAKTU TUNGGU RATA-RATA	PRESISI RELATIF
43	[.4184474, .5933399]	.5058936	.172855
44	[.4068643, .5897756]	.49832	.1835281
45	[.4972789, .7061763]	.6017276	.1735814
46	[.4183914, .6004099]	.5094007	.1786594
47	[.4660551, .663699]	.564877	.1749442
48	[.4222142, .6311934]	.5267038	.1983841
49	[.459562, .6511243]	.5553432	.172472
50	[.4586873, .6850537]	.5718705	.1979175
51	[.3548863, .5080006]	.4314435	.1774442
52	[.4223576, .6028684]	.512613	.1760692
53	[.4129859, .6022077]	.5075968	.1863898
54	[.4283344, .5896371]	.5089858	.158455
55	[.4591837, .6328564]	.54602	.1590351
56	[.47116, .6964603]	.5838102	.1929568
57	[.3762116, .5310906]	.4536511	.1707028
58	[.3872223, .6152705]	.5012464	.2274812
59	[.3979861, .5591198]	.478553	.1683551
60	[.5024255, .742186]	.6223058	.1926389
61	[.4234022, .5977796]	.5105909	.1707604
62	[.4398047, .6384817]	.5391432	.1842525
63	[.3691841, .5380793]	.4536317	.186159
64	[.4597473, .6519226]	.555835	.1728709
65	[.38969, .5267889]	.4582395	.149593
66	[.4563513, .6731122]	.5647317	.1919149
67	[.4583555, .6158462]	.5371009	.1466119
68	[.4715677, .6754809]	.5735243	.1777721
69	[.5138481, .7532569]	.6335525	.1889416
70	[.4633626, .6616098]	.5624862	.176224
71	[.4569303, .620636]	.5387831	.1519218
72	[.4656948, .6915764]	.5786356	.1951847
73	[.3612998, .4577645]	.4095322	.1177742
74	[.3778595, .5093266]	.443593	.1481843
75	[.4241724, .5586335]	.4914029	.1368134
76	[.4593004, .6605747]	.5599375	.1797293
77	[.4384659, .6006737]	.5195698	.1560982
78	[.3390456, .4364793]	.3877625	.1256358
79	[.3362070, .4759722]	.4060896	.1720867
80	[.3392467, .4776223]	.4084345	.1693974
81	[.484626, .6700235]	.5773248	.1605659
82	[.4724861, .6544054]	.5634458	.1614345
83	[.276573, .4133567]	.3449645	.1982588
84	[.4483267, .6122358]	.4393244	.1545491
85	[.411321, .594642]	.502982	.1822348
86	[.327012, .484475]	.4057432	.1940423

(lanjutan) Tabel-1b

Banyak batch tiap simulasi : 40

Banyak pengamatan tiap batch : 50

SIMULASI KE	90% INTERVAL KEPERCAYAAN	WAKTU TUNGGU RATA-RATA	PRESISI RELATIF
87	[.4078709, .604853]	.506362	.1945072
88	[.403953, .602540]	.503247	.1973058
89	[.339312, .490627]	.41497	.182321
90	[.323972, .4804658]	.4022193	.194537
91	[.3203346, .4799692]	.400152	.1994676
92	[.3290072, .4769582]	.4769583	.1835699
93	[.3369336, .4975743]	.4172545	.1924976
94	[.3341729, .4951670]	.41467	.1941231
95	[.414761, .614579]	.51467	.1941231
96	[.339422, .499226]	.4193244	.1905491
97	[.326876, .482055]	.404466	.191832
98	[.3930706, .4888385]	.4409545	.1104744
99	[.364706, .4857092]	.4252076	.1422873
100	[.3698551, .4642995]	.4170773	.1051871

(lanjutan) Tabel-1c

Proporsi banyak interval yang mengandung waktu tunggu rata-rata yang dihitung secara analitik ($\alpha=0.5$) adalah : 76%

90% interval kepercayaan bagi proporsi tersebut : 0.76 ± 0.07

Nilai presisi relatif rata-rata adalah : 0.1723501

METODA BATCH

Banyak batch tiap simulasi : 40

Banyak pengamatan tiap batch : 90

SIMULASI KE	90% INTERVAL KEPERCAYAAN	WAKTU TUNGGU RATA-RATA	PRESISI RELATIF
1	[.4726737, .5985001]	.5355879	.1174659
2	[.4560445, .598433]	.5272387	.1350323
3	[.4855439, .6425464]	.5640451	.1391756
4	[.4089451, .5219723]	.4654587	.1214148
5	[.3959242, .5010732]	.4484987	.1172233
6	[.3583728, .4605112]	.409442	.1247287
7	[.3864853, .4909966]	.438741	.1191037
8	[.3742866, .4763523]	.4253194	.1199871
9	[.4455264, .5652345]	.5053805	.1184337
10	[.4739339, .6614853]	.5677096	.1651825
11	[.4592047, .6061943]	.5326995	.1379667
12	[.4824921, .6226864]	.5525892	.1268521
13	[.3920159, .4914486]	.4417323	.1125485
14	[.4084161, .5137883]	.4611022	.1142612
15	[.393041, .5039173]	.4484792	.1236137
16	[.3422467, .4392292]	.390738	.1241017
17	[.360992, .4568818]	.4089369	.1172428
18	[.4736728, .5726842]	.5231785	.09462493
19	[.4545905, .581178]	.5178843	.122216
20	[.4238346, .5438237]	.4838292	.1239995
21	[.3702842, .4785003]	.4243922	.1274954
22	[.4649401, .5922014]	.5285708	.1203825
23	[.4857192, .607661]	.5466901	.1115273
24	[.465573, .602671]	.534122	.1283396
25	[.4663516, .6309582]	.5486549	.1500092
26	[.4645546, .6007757]	.5326651	.1278675
27	[.4907148, .6288181]	.5597664	.123358
28	[.4615935, .6407322]	.5511628	.1625098
29	[.4386842, .5747564]	.5067203	.1342676
30	[.4662962, .570601]	.5184486	.1005932
31	[.4903891, .6210833]	.5557362	.1175864
32	[.4073485, .5155751]	.4614618	.117265
33	[.3951549, .5132591]	.454207	.1300115
34	[.3870506, .4902746]	.4386626	.1176576
35	[.416969, .5627026]	.4898358	.1487576
36	[.4261244, .545382]	.4857532	.1227554
37	[.3647102, .4604631]	.4125867	.1160398
38	[.4436539, .6100166]	.5268353	.1578887
39	[.4332459, .5794697]	.5063578	.1443878
40	[.4194036, .5343182]	.4768609	.1204907
41	[.4429282, .6006833]	.5218058	.1511627
42	[.4664843, .6080374]*	.5372608	.1317359

Tabel-2a

Banyak batch tiap simulasi : 40

Banyak pengamatan tiap batch : 90

SIMULASI KE	90% INTERVAL KEPERCAYAAN	WAKTU TUNGGU RATA-RATA	PRESISI RELATIF
43	[.4603979, .5982086]	.5293032	.1301812
44	[.4940005, .6443639]	.5691822	.1320872
45	[.4840788, .6297813]	.5569301	.1308086
46	[.4604134, .6036834]	.5320484	.13464
47	[.4891168, .6651947]	.5771558	.1525393
48	[.4632034, .6158181]	.5395108	.141438
49	[.4940645, .6660019]	.5800332	.1482133
50	[.4689661, .6519486]	.5604574	.1632439
51	[.4429282, .6006833]	.5218058	.1511627
52	[.4556146, .5933645]	.5244895	.1313181
53	[.467294 , .5948924]	.5310932	.120128
54	[.4200212, .545247]	.4826341	.1297317
55	[.4685308, .6085892]	.53856	.1300304
56	[.4649866, .6265701]	.5457783	.1480304
57	[.5044641, .6490036]	.5767338	.1253087
58	[.4237103, .6064853]	.5150978	.1774177
59	[.4359361, .5371881]	.4865621	.1040483
60	[.45748 , .5629818]	.5102309	.1033864
61	[.4701967, .6134605]	.5418286	.132204
62	[.4631352, .6046383]	.5338867	.1325216
63	[.4416869, .5985808]	.5201339	.1508208
64	[.4935949, .6620698]	.5778323	.1457818
65	[.4627254, .6407962]	.5517608	.1613659
66	[.4600725, .5886429]	.5243577	.122598
67	[.4582917, .5714079]	.5148498	.1098537
68	[.4671378, .6056403]	.5363891	.1291064
69	[.4884729, .6379863]	.5632296	.1327287
70	[.4334283, .5996363]	.5165323	.1608883
71	[.4662749, .593977]	.530126	.1204451
72	[.4519754, .6310542]	.5415148	.1653499
73	[.4098759, .5122595]	.4610677	.1110288
74	[.3820431, .4686279]	.4253355	.1017842
75	[.4316799, .5439894]	.4878347	.1151102
76	[.4469324, .6015547]	.5242435	.1474719
77	[.4404001, .5678961]	.5041481	.126447
78	[.3907321, .5038614]	.4472968	.1264589
79	[.4736477, .5689393]	.5212935	.09139913
80	[.4944608, .6536083]	.5740345	.1386219
81	[.4112488, .5222234]	.4667361	.1188836
82	[.420624 , .5201299]	.4703769	.1057725
83	[.4061096, .5116328]	.4588712	.1149813
84	[.3973792, .5239853]	.4606822	.1374115
85	[.4333257, .551633]	.4924794	.120114
86	[.4061164, .5206304]*	.4633734	.1235656

Tabel-2b

Banyak batch tiap simulasi : 40

Banyak pengamatan tiap batch : 90

SIMULASI KE	90% INTERVAL KEPERCAYAAN	WAKTU TUNGGU RATA-RATA	PRESISI RELATIF
87	[.3947634, .5026149]	.4486892	.1201851
88	[.3989536, .5049828]	.4519682	.1172973
89	[.4203499, .533923]	.4771365	.1190154
90	[.3850033, .4895048]	.437254	.11949759
91	[.3959796, .5106491]	.4533144	.126479
92	[.4085954, .5176568]	.4631261	.1177449
93	[.4071231, .5201007]	.4636119	.121845
94	[.4317848, .5636066]	.4976957	.1324322
95	[.4090802, .5216451]	.4653627	.1209432
96	[.4557461, .6328723]	.5443092	.1627073
97	[.4087683, .5048103]	.4567893	.1051272
98	[.4343844, .5709797]	.502682	.1358666
99	[.4186756, .5669102]	.4927929	.1504025
100	[.444631, .5948214]	.5197262	.1444899

(Lanjutan) Tabel-2c

Proporsi banyak interval yang mengandung waktu tunggu rata-rata yang dihitung secara analitik ($=0.5$) adalah : 89%

90% interval kepercayaan bagi proporsi tersebut : 0.89 ± 0.05

Nilai presisi relatif rata-rata adalah : 0.1293398

III. DAFTAR PUSTAKA

1. Anderson, T.W., *The Statistical Analysis of Time Series*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971.
2. Fraser, D.A.S, *Nonparametric Methods in Statistics*, Wiley, New York, 1978.
3. Law, Averill M. dan W. David Kelton, *Simulation Modeling and Analysis*, McGraw-Hill, 1982.