

TRANSPORTATION PROBLEM

Dahlia Br Ginting

Sekolah Tinggi Manajemen Informatika dan Komputer LIKMI
Jl. Ir. Juanda 96 Bandung 40132

E-mail : Carlo2007@telkom.net

Abstrak

Di sini akan dibahas tentang masalah Transportasi atau distribusi barang dan jasa dari beberapa lokasi (supplier) ke lokasi lain (customer). Umumnya ada keterbatasan barang atau kapasitas tertentu pada tiap lokasi asal (supplier) dan jumlah pesanan/permintaan tertentu pada tiap lokasi tujuan (customer).

Tujuan yang ingin dicapai adalah dengan adanya berbagai route pengiriman barang dan biaya pengiriman, kita ingin menentukan berapa unit barang yang harus dikirim dari suatu lokasi asal ke lokasi tujuan tertentu sehingga seluruh permintaan terpenuhi dengan total biaya pengiriman minimum.

Kata kunci : Solusi awal fisibel, solusi optimal, maksimasi, minimasi

1. PENDAHULUAN

Persoalan pemrograman linier yang bertipe khusus, yang kekhususannya terletak pada beberapa karakteristik utama. Karakter-karakter itu di antaranya ialah bahwa persoalan-persoalan tersebut cenderung membutuhkan sejumlah pembatas dan variabel yang sangat banyak sehingga penggunaan komputer dalam penyelesaian metode simpleksnya akan sangat mahal, atau mungkin proses perhitungannya akan menghadapi berbagai hambatan. Karakteristik lain adalah bahwa kebanyakan koefisien aij dalam pembatas-pembatasnya berharga nol. Karena itu penting bagi kita untuk mengenal tipe-tipe khusus dari persoalan ini, sehingga jika pada suatu saat persoalan ini muncul, kita akan segera mengenal dan dapat menyelesaikannya dengan prosedur perhitungan yang tepat.

Tipe khusus program linier yang paling penting ialah persoalan transportasi. Disamping itu ada juga dua tipe khusus lainnya, yaitu persoalan *transshipment* dan persoalan penugasan (*assignment*) yang tidak dibahas di sini.

2. MODEL TRANSPORTASI

Secara diagramatik, model transportasi dapat digambarkan sebagai berikut:

Misalkan ada m buah sumber dan n buah tujuan:

- Masing-masing sumber mempunyai kapasitas a_i , $i = 1, 2, 3, \dots, m$

- Masing-masing tujuan membutuhkan komoditas sebanyak b_j , $j = 1, 2, 3, \dots, n$
- Jumlah satuan (unit) yang dikirimkan dari sumber i ke tujuan j adalah sebanyak X_{ij}
- Ongkos pengiriman per unit dari sumber i ke tujuan j adalah C_{ij}

Dengan demikian, maka formulasi program liniernya adalah sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan: } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

$$\text{Berdasarkan pembatas: } \sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = a_j, j = 1, 2, \dots, m$$

dan $X_{ij} \geq 0$, untuk seluruh i dan j .

Sebagai ilustrasi, perhatikan masalah transportasi berikut. Suatu perusahaan memiliki agen di kota A, B, dan C yang masing-masing mampu menampung 5, 10 dan 15 unit barang. Agen-agen tersebut haruslah memenuhi permintaan di daerah P, Q, R dan S masing-masing sebesar 12, 8, 4 dan 6 unit barang. Kita ingin menentukan alokasi jumlah yang akan dikirim dari masing-masing agen penyalur yang akan meminimumkan biaya transportasi. Biaya transportasi per unit barang dari agen ke daerah diberikan pada tabel di bawah ini:

		Tujuan			
		P	Q	R	S
Asal	A	2	3	5	6
	B	2	1	3	5
	C	3	8	4	6

Manajemen perusahaan ingin mengetahui berapa banyak produksi yang harus dikirim dari setiap pabrik ke agen penyalurnya ?

Dengan asumsi biaya produksi ketiga pabrik sama. Maka satu-satunya biaya berubah (variable cost) yang harus diperhitungkan adalah biaya transportasi. Persoalannya menjadi, bagaimana menentukan route distribusi yang akan digunakan, dan banyak unit produk

yang akan dikirim melalui setiap route sehingga semua permintaan agen terpenuhi dengan biaya total transportasi yang minimal.

Jika diketahui biaya untuk mengirim tiap unit produk dari suatu pabrik ke agen penyalur tertentu seperti data pada tabel berikut:

Algoritma penyelesaian masalah transportasi terdiri dari 2 bagian, yaitu:

1. Mencari solusi awal yang fisibel.

Menggunakan metoda:

- Metode pojok kiri atas (Northwest Corner Rule).
- Least-cost Method
- Vogel's Approximation Method (VAM)

2. Lanjutkan secara iterasi untuk mencari solusi optimal, menggunakan metoda:

- Stepping Stone Method
- Modified Distribution (MODI) Method

Tabel transportasi untuk permasalahan di atas adalah:

Tujuan Asal	Agen P	Agen Q	Agen R	Agen S	Persediaan
Perusahaan A	x_{11} 2	x_{12} 3	x_{13} 5	x_{14} 6	5
Perusahaan B	x_{21} 2	x_{22} 1	x_{23} 3	x_{24} 5	10
Perusahaan C	x_{31} 3	x_{32} 8	x_{33} 4	x_{34} 6	15
Permintaan	12	8	4	6	30

A. Menentukan solusi awal

1. Metode Pojok Kiri Atas (Northwest Corner Rule)

Metode ini kita mulai mengisi sel yang terletak pada ujung kiri atas tabel dan mengalokasikan sejumlah maksimum produk dengan melihat kapasitas pabrik dan kebutuhan agen penyalur dengan pola “bergerak ke kanan dan turun”

Langkah-langkah metoda Northwest Corner Rule:

1. Mulai dengan sel pada ujung kiri atas tabel. Isi sebanyak mungkin sel tersebut. Jumlah yang diisi adalah nilai terkecil antara persediaan baris tersebut dengan permintaan kolom.
2. Kurangi persediaan baris dan permintaan kolom dengan jumlah yang diisikan pada sel.
3. Jika persediaan sudah nol, turun ke sel berikutnya pada kolom yang sama pada baris berikutnya. Jika permintaan kolom sudah nol, pindah ke sel berikutnya pada baris yang sama pada kolom berikutnya.

Dengan menggunakan aturan ini pada permasalahan di atas diperoleh tabel transportasi awal yang fisibel adalah sebagai berikut:

Tujuan Asal	Agen P	Agen Q	Agen R	Agen S	Persediaan
Perusahaan A	2 5	3	5	6	0
Perusahaan B	2 7	1 3	3	5	0
Perusahaan C	3	8 5	4 4	6 6	0
Permintaan	0	0	0	0	0

Solusi awal ini adalah solusi yang fisibel karena semua permintaan dapat dipenuhi dan semua persediaan yang ada telah terpakai, tetapi solusi ini belum tentu merupakan solusi yang optimal. Total biaya transportasi untuk solusi fisibel awal ini adalah:

Rute Agen Daerah	Jumlah yang dikirim (unit)	Biaya kirim per unit	Biaya kirim
A P	5	2	10
B P	7	2	14
B Q	3	1	3
C Q	5	8	40
C R	4	4	16
C S	6	6	36
		Total	119

2. Vogel's Approximation Method (VAM)

Metoda ini berusaha untuk mencari solusi awal dengan biaya transportasi yang terkecil.

Langkah-langkah metoda VAM:

1. Untuk setiap baris dan kolom pada tabel transportasi, hitung biaya pinalti, yaitu selisih antara biaya terbaik (minimum) pada baris atau kolom tersebut dengan biaya terbaik (minimum) kedua pada baris atau kolom tersebut.
2. Tentukan baris atau kolom dengan biaya penalti terbesar dan isikan sebanyak mungkin produk pada sel terbaik atau *route* terbaik pada baris atau kolom dengan biaya penalti terbesar tersebut.
3. Kurangi persediaan baris dan permintaan kolom dengan jumlah yang diisikan ke dalam sel pada langkah 2.
4. Jika persediaan baris = 0, eliminir baris tersebut. Jika permintaan kolom = 0, eliminir kolom tersebut. Jika baris dan permintaan kolom keduanya = 0, eliminir baris dan kolom tersebut.
5. Hitung biaya penalti baru untuk tiap baris dan kolom yang masih ada, lalu kembali ke langkah 2 lagi, hingga solusi awal yang fisibel diperoleh.

Metoda VAM ini jika diterapkan pada permasalahan di atas, maka diperoleh:

	P	Q	R	S	Persediaan	Penalti baris
A	2	3	5	6	5	1
B	2	1	3	5		
C	3	8	4	6	10	1
					15	
Permintaan	12	8	4	6		
Penalti Kolom	1	2	1	1		

Kolom kedua memiliki nilai pinalti kolom paling besar yaitu 2, maka kita alokasikan sejumlah 8 unit ke kolom kedua yang memiliki ongkos kirim yang paling kecil (sel B-Q). Karena kolom kedua telah terpenuhi semuanya maka kolom kedua kita hapus.

	P	Q	R	S	Persediaan	Penalti baris
A	2 5	3	5	6	5	3
B	2	1 8	3	5	2	1
C	3	8	4	6	15	1
Permintaan	12	0	4	6		
Penalti Kolom	1	-	1	1		

Baris pertama memiliki penalti yang terbesar, sehingga kita alokasikan sejumlah 5 unit ke sel A – P yang memiliki ongkos kirim paling kecil. Karena persediaan di agen A telah habis, maka baris satu kita hapus.

	P	Q	R	S	Persediaan	Penalti baris
A	2 5	3	5	6	0	-
B	2 2	1 8	3	5	2	1
C	3	8	4	6	15	1
Permintaan	7	0	4	6		
Penalti Kolom	1	-	1	1		

Sekarang semua baris dan kolom yang tersisa memiliki biaya penalti yang sama. Dalam hal ini kita boleh memilih baris atau kolom yang mana saja. Bila kita pilih baris kedua sebagai baris dengan penalti terbesar, maka kita alokasikan 2 unit yang tersisa di agen B untuk daerah P karena ongkos kirimnya yang paling kecil.

	P	Q	R	S	Persediaan	Penalti baris
A	5 $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5 \\ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 6 \\ \end{array} \right.$	0	-
B	2 $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ \end{array} \right.$	8 $\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5 \\ \end{array} \right.$	0	-
C	5 $\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 8 \\ \end{array} \right.$	4 $\left\{ \begin{array}{l} 4 \\ \end{array} \right.$	6 $\left\{ \begin{array}{l} 6 \\ \end{array} \right.$	15	1
Permintaan	12	0	4	6		
Penalti Kolom	3	-	4	6		

Untuk sel-sel yang belum terisi kita alokasikan 5 unit ke sel C – P dan 6 unit ke sel C – S , sehingga sekarang solusi awal yang fisibel telah diperoleh, yaitu:

Rute Agen Daerah	Jumlah yang dikirim (unit)	Biaya kirim per unit	Biaya kirim
A P	5	2	10
B P	2	2	4
B Q	8	1	8
C P	5	3	15
C R	4	4	16
C S	6	6	36
		Total	89

Terlihat bahwa total ongkos kirim yang diperoleh menggunakan metode VAM lebih kecil dibandingkan dengan metode NWCR

3. Least-cost Method

Metode least cost menentukan solusi awal yang lebih baik dengan mempertimbangkan rute yang paling murah. Kita mulai mengisikan sebanyak mungkin barang ke sel dengan biaya per unit yang paling murah, kemudian mengurangi jumlah permintaan dan kapasitas setelah dikurangi dengan jumlah yang diisikan pada sel termurah tadi. Jika kapasitas baris atau permintaan kolom sudah nol, coretlah baris atau kolom tersebut. Selanjutnya kita beralih ke sel yang belum terisi lainnya untuk kemudian mengulangi proses di atas.

Penerapan metode least-cost pada permasalahan di atas akan memberikan hasil sebagai berikut:

	P	Q	R	S	Persediaan
A	2 5	3	5	6	5
B	2 2	1 8	3	5	10
C	3 5	8	4 4	6 6	15
Permintaan	12	8	4	6	30

Sel B-Q memiliki ongkos kirim per unit yang paling murah yaitu 1, maka kita alokasikan sebanyak mungkin barang ke sel itu. Jumlah maksimum yang boleh dialokasikan adalah 8 unit, yang memenuhi permintaan agen Q. Karena permintaan dari agen Q telah terpenuhi semuanya, maka kolom Q kita coret dan kita mulai mealokasikan barang ke sel yang belum dicoret yang memiliki ongkos kirim per unit yang termurah. Sel A-P dan B-P memiliki ongkos kirim per unit yang paling murah yaitu 2, maka kita boleh mengalokasikan sebanyak mungkin barang ke sel-sel itu yaitu 2 unit ke sel B-P dan 5 unit ke sel A-P. Selanjutnya alokasikan berturut-turut ke sel C-P (5 unit), C-R (4 unit) dan C-S (6 unit).

Diperoleh total ongkos kirim dengan menggunakan metode least-cost adalah sebagai berikut:

Rute Agen Daerah	Jumlah yang dikirim (unit)	Biaya kirim per unit	Biaya kirim
A P	5	2	10
B P	2	2	4
B Q	8	1	8
C P	5	3	15
C R	4	4	16
C S	6	6	36
		Total	89

B. Menentukan Solusi Optimal

1. Menggunakan metode Stepping Stone

Metoda ini hanya dapat digunakan jika solusi fisibel awal yang telah diperoleh menggunakan metoda Northwest Corner Rule ataupun VAM, memiliki $(m+n-1)$ route (sel yang terisi), dimana m = asal dan n = tujuan transportasi.

Langkah-langkah metoda Stepping stone:

1. Untuk setiap sel kosong, cari lintasan stepping stoneya. Lintasan stepping stone ini memiliki sudut-sudut berupa hanya sebuah sel kosong sedangkan sudut-sudut yang lainnya haruslah berupa sel isi.
2. Hitung perubahan per unit (eij) akibat menambahkan sebuah unit produk pada sel kosong dengan cara sebagai berikut:
 - a. Beri label pada sel kosong sebagai sel awal (no.1) dan berturut-turut nomor 2, 3, 4, ... pada sel-sel isi yang membentuk sudut-sudut pada lintasan stepping stone.
 - b. Nilai perubahan per unit yang diperoleh dari menambahkan satu unit pada sel kosong dapat dihitung dengan menjumlahkan semua biaya kirim per unit dari sel-sel yang bernomor ganjil pada lintasan stepping stone, kemudian mengurangnya dengan jumlah semua biaya kirim per unit dari sel-sel yang bernomor genap.
3. Dalam kasus minimasi. Jika nilai perubahan per unit untuk semua sel kosong tidak negatif, solusi optimal sudah diperoleh. Jika ada sel kosong yang nilai perubahan per unitnya negatif, pilihlah sel dengan nilai yang paling negatif. Lanjut ke langkah 4.
4. Untuk sel yang paling negatif ini, perhatikan lintasan stepping stoneya (juga nomor-nomor urutnya) seperti yang telah ditentukan pada langkah 2. Carilah sel terisi bernomor genap yang nilainya paling kecil, kemudian tambahkanlah nilai ini pada sel kosong dan semua sel isi bernomor ganjil dan kurangi nilai semua sel bernomor genap dengan nilai tersebut. Kembali ke langkah 1.

Jika kita terapkan langkah-langkah metode stepping stone ini pada solusi awal yang diperoleh dari metode NWCR, diperoleh:

	P	Q	R	S	Persediaan
A	5 2	3 3	5 5	6 6	5
B	7 2	3 1	3 3	5 5	10
C	3 3	5 8	4 4	6 6	15
Permintaan	12	8	4	6	30

Kita akan mencari nilai e_{ij} untuk sel-sel yang kosong yaitu A – Q, A – R, A – S, B – R, B – S dan C – P.

Kita ambil contoh untuk sel A – Q, yaitu akan dicari nilai e_{12} .

	P	Q	R	S	Persediaan
A	2 5	3 3	5 5	6 6	5
B	2 7	1 3	3 3	5 5	10
C	3 3	8 5	4 4	6 6	15
Permintaan	12	8	4	6	30

Lintasan stepping stone untuk sel kosong A – Q diberikan oleh garis yang putus-putus. Sel A-Q memiliki nomor urut 1, B-Q dengan nomor urut 2, B-P nomor urut 3 dan A-P nomor urut 4.

Nilai $e_{ij} = (2+3) - (1+2) = +2$. Dengan cara yang sama untuk setiap sel-sel yang kosong dapat diperoleh nilai e_{ij} -nya, sehingga diperoleh tabel berikut:

	P	Q	R	S	Persediaan
A	2 5	3 +2	5 +8	6 +7	5
B	2 7	1 3	3 +6	5 +6	10
C	3 -6	8 5	4 4	6 6	15
Permintaan	12	8	4	6	30

Karena kasusnya adalah minimasi, maka solusi yang diperoleh pada tabel di atas belum optimal, karena masih ada e_{ij} yang bernilai negatif yaitu sel C-P dengan lintasan stepping stononya seperti ditunjukkan pada garis putus-putus di atas. Sel bernomor genap dengan nilai terkecil adalah sel C-Q dengan nilai 5. Tambahkan nilai 5 ini ke sel-sel yang bernomor ganjil dan kurangi sel bernomor genap dengan 5, sehingga diperoleh:

	P	Q	R	S	Persediaan
A	2 5	3 3	5 5	6 6	5
B	2 2	1 8	3 3	5 5	10
C	3 5	8 3	4 4	6 6	15
Permintaan	12	8	4	6	30

Untuk menentukan apakah solusi sudah optimal, ulangi lagi langkah 2 untuk menghitung nilai perubahan per eij untuk sel-sel kosong.

	P	Q	R	S	Persediaan
A	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 5 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline +2 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline +2 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline +1 \end{array}$	5
B	$\begin{array}{ c } \hline 2 \\ \hline 2 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline 0 \end{array}$	10
C	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 5 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 8 \\ \hline +6 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline 6 \end{array}$	15
Permintaan	12	8	4	6	30

Karena sudah tidak ada lagi nilai eij yang negatif, maka solusi optimal telah diperoleh yaitu:

Rute Agen Daerah	Jumlah yang dikirim (unit)	Biaya kirim per unit	Biaya kirim
A P	5	2	10
B P	2	2	4
B Q	8	1	8
C Q	5	3	15
C R	4	4	16
C S	6	6	36
		Total	89

Solusi yang diperoleh di atas sama dengan yang diperoleh dengan metode VAM. Perlu diingat bahwa hal ini terjadi hanya secara kebetulan saja. Tapi pada umumnya metode stepping stone akan menghasilkan solusi yang lebih baik dari metode VAM.

2. Menggunakan Metode MODI

Kesulitan menggunakan stepping stone adalah menentukan lintasan stepping stone untuk sel-sel yang kosong, sehingga kita dapat menghitung nilai eij nya.

Cara lain untuk menghitung nilai eij adalah dengan metoda MODI.

Metoda MODI hanya membantu mempermudah menghitung eij untuk sel-sel kosong.

Penentuan solusi optimal sudah dicapai atau belum, tetap menggunakan kriteria Stepping Stone Method.

Langkah-langkah metoda MODI:

1. Beri index U_i untuk setiap baris ($i = 1, 2, 3, \dots$) dan index V_j untuk setiap kolom ($j = 1, 2, 3, \dots$)

Nilai U_i dan V_j dapat diperoleh dengan mengambil:

$$U_1 = 0$$

$$U_i + V_j = C_{ij} \text{ untuk sel-sel yang terisi}$$

dimana C_{ij} = biaya kirim dari i ke j

2. Hitung e_{ij} untuk setiap sel kosong, dimana

$$e_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$
3. Ikuti langkah 3 dari metoda stepping stone.
4. Ikuti langkah 4 dari metoda stepping stone.

Sekarang kita akan menggunakan metode MODI untuk menyelesaikan masalah transportasi di atas dengan solusi fisibel awal dari metode NWCR.

	V1	V2	V3	V4	
	P	Q	R	S	Persediaan
U1 A	2 5	3	5	6	5
U2 B	2 7	1 3	3	5	10
U3 C	3	8 5	4 4	6 6	15
Permintaan	12	8	4	6	30

Untuk sel-sel isi kita peroleh:

$$A-P : U_1 + V_1 = 2$$

$$B-P : U_2 + V_1 = 2$$

$$B-Q : U_2 + V_2 = 1$$

$$C-Q : U_3 + V_2 = 8$$

$$C-R : U_3 + V_3 = 4$$

$$C-S : U_3 + V_4 = 6$$

Dengan mengambil $U_1 = 0$ maka diperoleh : $V_1 = 2, U_2 = 0, V_2 = 1, U_3 = 7, V_3 = -3, V_4 = -1$

Untuk sel-sel kosong kita hitung nilai e_{ij} -nya.

$$A-P : e_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 2$$

$$B-P : e_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 8$$

$$B-Q : e_{14} = C_{14} - U_1 - V_4 = 7$$

$$C-Q : e_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 6$$

$$C-R : e_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 = 6$$

$$C-S : e_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = -6$$

Ternyata masih ada nilai e_{ij} yang negatif, yaitu sel C-P.

Lintasan stepping stone untuk sel kosong C-P ini adalah:

	V1	V2	V3	V4	
	P	Q	R	S	Persediaan
U1 A	5 2	+2 3	+8 5	+7 6	5
U2 B	7 2	3 1	+6 3	+6 5	10
U3 C	-6 3	5 8	4 4	6 6	15
Permintaan	12	8	4	6	30

Sel bernomor genap dengan nilai terkecil adalah sel C-Q dengan nilai 5. Tambahkan nilai 5 ini ke sel-sel yang bernomor ganjil dan kurangi sel bernomor genap dengan 5, sehingga diperoleh:

	V1	V2	V3	V4	
	P	Q	R	S	Persediaan
U1 A	5 2	3 3	5 5	6 6	5
U2 B	2 2	8 1	3 3	5 5	10
U3 C	5 3	8 8	4 4	6 6	15
Permintaan	12	8	4	6	30

Kita hitung kembali nilai e_{ij} untuk sel-sel yang kosong, tetapi sebelumnya kita hitung nilai U_i dan V_j untuk sel-sel isi.

Untuk sel-sel isi kita peroleh:

$$\begin{aligned} A-P & : U_1 + V_1 = 2 \\ B-P & : U_2 + V_1 = 2 \\ B-Q & : U_2 + V_2 = 1 \\ C-Q & : U_3 + V_1 = 3 \end{aligned}$$

$$C-R : U_3 + V_3 = 4$$

$$C-S : U_3 + V_4 = 6$$

Dengan mengambil $U_1 = 0$ maka kita peroleh : $V_1 = 2, U_2 = 0, V_2 = 1, U_3 = 1, V_3 = 3, V_4 = 5$

Untuk sel-sel kosong kita hitung nilai eij-nya.

$$A-Q : e_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 2$$

$$A-R : e_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 2$$

$$A-S : e_{14} = C_{14} - U_1 - V_4 = 1$$

$$B-R : e_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 0$$

$$B-S : e_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 = 0$$

$$C-Q : e_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 6$$

Sekarang semua nilai eij untuk sel-sel yang kosong sudah tidak ada yang negatif sehingga solusi optimum telah diperoleh yang ternyata sama dengan solusi yang diperoleh pada metode stepping stone, yaitu:

Rute Agen Daerah	Jumlah yang dikirim (unit)	Biaya kirim per unit	Biaya kirim
A P	5	2	10
B P	2	2	4
B Q	8	1	8
C Q	5	3	15
C R	4	4	16
C S	6	6	36
		Total	89

Beberapa kasus yang mungkin terjadi:

- Total persediaan tidak sama dengan total permintaan
 Jika total persediaan > total permintaan
 Tambahkan sebuah tempat tujuan (*dummy destination*) dengan besar permintaan tepat sama dengan selisih total persediaan dan permintaan tadi.
 Jika total persediaan < total permintaan
 Tambahkan sebuah tempat asal (*dummy origin*) dengan besar persediaan tepat sama dengan selisih total persediaan dan permintaan tadi.
- Objektifnya berupa maksimasi
 Sama seperti minimasi, hanya solusi optimal diperoleh jika tidak ada lagi sel dengan eij yang positif. Jika masih ada, pilihlah sel yang paling positif sebagai sel terbaik dan alokasikan produk sebanyak-banyaknya ke sel tersebut.

3. Tabel transportasi memiliki kurang dari $(m+n-1)$ sel terisi

Kasus ini menyebabkan kurangnya sel terisi untuk menentukan lintasan Stepping Stone bagi sel-sel kosong, atau untuk menentukan nilai U_i dan V_j pada metode MODI. Untuk mengatasi hal ini, kita pilih sebuah sel dengan nilai produk yang dikurangkan = 0 pada sel kosong dan memperlakukannya sebagai sel terisi. Kita harus memilih sel kosong yang diisi nilai 0 dan menjadi sel terisi ini sedemikian rupa sehingga dengan demikian semua lintasan Stepping Stone dapat ditentukan, atau semua nilai U_i dan V_j pada MODI dapat dihitung.

3. KESIMPULAN

1. Metode North-West Corner Rule (NWCR) mudah digunakan dalam mencari solusi fisibel awal, walaupun solusi yang diperoleh mungkin masih jauh dari solusi optimal karena pada metode ini sama sekali tidak memperhitungkan biaya kirim pada tiap-tiap rute.
2. Terlihat bahwa total ongkos kirim yang diperoleh menggunakan metode VAM lebih kecil dibandingkan dengan metode NWCR. Perlu diingat bahwa solusi fisibel yang diberikan kedua metode ini belum tentu merupakan solusi optimal.
3. Kesulitan yang terjadi pada metode stepping stone adalah pada saat menentukan lintasan stepping stone untuk sel-sel yang kosong untuk menghitung nilai e_{ij} -nya.
4. Metode MODI hanyalah mempermudah menghitung nilai e_{ij} untuk sel-sel yang kosong, sedangkan penentuan apakah solusi optimum telah tercapai tetap menggunakan metode stepping stone.
5. Nilai e_{ij} yang diperoleh pada MODI adalah sama dengan nilai e_{ij} yang diperoleh dengan metode stepping stone.

4. DAFTAR PUSTAKA

1. Rodney D. Johnson & Bernard R. Siskin, *Quantitative Techniques for Business Decision*
2. Drs. Pangestu Subagyo, M.B.A., cs., *Dasar-dasar Operations Research*, BPFE, Yogyakarta.
3. Tjutju Tarliah Dimiyanti – Ahmad Dimiyanti. *Operations Research*. Sinar Baru Algensindo.