

## PEMROGRAMAN METODA ELEMEN HINGGA PADA MASALAH KONDUKSI KALOR

Ekabrata Yudhistyra

Sekolah Tinggi Manajemen Informatika dan Komputer LIKMI  
Jl. Ir. H. Juanda 96 Bandung 40132

---

### Abstract

Banyak permasalahan dalam fisika dan teknik yang dapat dirumuskan dalam bentuk persamaan differensial parsial. Seringkali solusi analitis dari persamaan differensial ini sukar diperoleh, sehingga dicari solusi pendekatan secara numerik dengan bantuan program komputer. Pada masalah konduksi kalor, metoda numerik yang umumnya digunakan adalah metoda beda hingga (finite difference method). Untuk domain solusi yang tidak homogen atau kompleks bentuk geometrinya, penyelesaian dengan metoda ini menjadi sukar. Kesulitan di atas dapat diatasi dengan menggunakan metoda elemen hingga. Salah satu metoda dalam metoda elemen hingga ini adalah metoda variasi. Dalam metoda variasi bentuk persamaan differensial parsial diubah ke dalam formulasi persamaan integral yang disebut fungsional. Dalam metoda elemen hingga ini domain solusi juga dibagi menjadi daerah-daerah yang lebih kecil (subdomain) yang disebut elemen, sehingga fungsional tersebut didefinisikan untuk tiap-tiap elemen. Dengan meminimumkan fungsional tersebut, diperoleh sistim persamaan matriks untuk tiap elemen, yang dapat disusun (assemble) menjadi sistim persamaan matriks global untuk seluruh domain solusi. Sistim persamaan matriks global ini kemudian diselesaikan menggunakan program komputer untuk memperoleh nilai-nilai pendekatan numerik pada semua titik simpul dalam domain solusi. Nilai-nilai pendekatan pada titik-titik lainnya dalam domain dapat diperoleh dari nilai-nilai pendekatan pada titik-titik simpul dengan menggunakan fungsi interpolasi tertentu yang biasanya diambil berupa fungsi polinomial.

**Key Word :** finite, elemen, numerik

---

### 1. Perumusan Metoda Elemen Hingga pada Masalah Konduksi Kalor

Distribusi temperatur pada suatu domain dalam keadaan setimbang memenuhi persamaan differensial berikut :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (1)$$

dengan syarat batas Dirichlet :

$$T = T_B \text{ pada batas domain } S_1 \quad (2a)$$

dan/ atau syarat batas Neumann :

$$k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} 1_x + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} 1_y + k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} 1_z + q + h(T - T_\infty) = 0$$

pada batas domain  $S_2$  (2b)

dengan:

$k_{xx}, k_{yy}, k_{zz}$  = koefisien konduksi kalor dalam arah x, y, z

$1_x, 1_y, 1_z$  = kosinus arah vektor normal keluar permukaan batas domain terhadap arah x, y, dan z

Q = sumber kalor atau kebocoran kalor dalam domain

$S_1 \cup S_2 = S$  = batas seluruh domain

$T_\infty$  = temperatur sekeliling domain

q = fluks kalor pada batas domain

h = koefisien konveksi kalor

Dengan menggunakan teorema Mikhlin, kita dapat memperoleh fungsional yang berpadanan dengan persamaan differensial (1) beserta syarat batasnya. Nilai-nilai T yang memenuhi persamaan (1) beserta syarat batasnya dapat diperoleh dengan cara mencari nilai-nilai T yang meminimumkan fungsional berikut :

$$I(T) = \int_V \frac{1}{2} \left( k_{xx} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_{yy} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + k_{zz} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - 2QT \right) dV + \int_{S_2} \left( qT + \frac{1}{2} h(T - T_\infty)^2 \right) dS \quad (3)$$

Dengan definisi-definisi berikut :

$$\{g\}^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} & \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}$$

t = transpose (4)

dan  $[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix}$  (5)

maka persamaan (3) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$I(T) = \int_V \frac{1}{2} \{g\}' [D] \{g\} - 2TQ \, dV + \int_{S_3} Tq \, dS + \int_{S_4} \frac{1}{2} h [T^2 - 2TT_\infty + T^2_\infty] \, dS \quad (6)$$

Pada persamaan (6) integrasi pada batas domain  $S_2$  diuraikan menjadi integrasi pada batas domain  $S_3$  dan  $S_4$ . Batas domain  $S_3$  adalah batas atau permukaan dimana terjadi fluks kalor yang bukan disebabkan oleh konveksi, sedangkan batas domain  $S_4$  adalah batas atau permukaan dimana konveksi kalor terjadi.

Pada metoda elemen hingga peninjauan permasalahan dilakukan pada setiap elemen, sehingga fungsional pada persamaan (6) haruslah dituliskan untuk tiap-tiap elemen sebagai berikut:

$$I^{(e)}(T) = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{g^{(e)}\}' [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} \, dV - \int_{V^{(e)}} T^{(e)} Q^{(e)} \, dV + \int_{S_3^{(e)}} T^{(e)} q^{(e)} \, dS + \int_{S_4^{(e)}} \frac{1}{2} h^{(e)} [T^{(e)} T^{(e)} - 2T^{(e)} T_\infty + T^2_\infty] \, dS \quad (7)$$

Sehingga bentuk fungsional untuk seluruh domain merupakan sumasi dari fungsional-fungsional untuk tiap-tiap elemen. Persamaan (6) sekarang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$I(T) = \sum_{e=1}^E I^{(e)}(T) = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{g^{(e)}\}' [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} \, dV - \int_{V^{(e)}} T^{(e)} Q^{(e)} \, dV + \int_{S_3^{(e)}} T^{(e)} q^{(e)} \, dS + \int_{S_4^{(e)}} \frac{1}{2} h^{(e)} [T^{(e)} T^{(e)} - 2T^{(e)} T_\infty + T^2_\infty] \, dS \quad (8)$$

dengan :     E     = banyak elemen dalam domain  
               (e)    = elemen ke-e

Fungsional  $I(T)$  akan mencapai nilai minimum, jika :

$$\frac{\partial I(T)}{\partial \{T\}} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^E I^{(e)}(T) = \sum_{e=1}^E \frac{\partial I^{(e)}(T)}{\partial \{T\}} = 0 \quad (9)$$

$$\{T\} = [T_1 T_2 \dots T_n]'$$

n = banyak titik simpul pada seluruh domain

Ada 2 cara untuk menjabarkan persamaan (9) ini, yaitu :

- 1) Dengan menyelesaikan terlebih dahulu bentuk integral dari fungsional masing-masing elemen. Cara ini tidak dapat ditunjukkan secara umum, sebab untuk setiap masalah bentuk fungsionalnya berbeda-beda.
- 2) Dengan meminimumkan fungsional tersebut sebelum bentuk integralnya diselesaikan terlebih dahulu.

Untuk mengevaluasi bentuk  $\frac{\partial I^{(e)}(T)}{\partial \{T\}}$  pada persamaan (9) tanpa

menyelesaikan bentuk integral dari fungsionalnya, maka bentuk fungsional tersebut harus dituliskan dalam suku-suku berupa nilai-nilai temperatur pada titik-titik simpul  $\{T\}$ .

Menurut persamaan:  $\hat{T}^{(e)} = [N^{(e)}] \cdot \{T\}$

sehingga :

$$\{g^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{T}^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{T}^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{T}^{(e)}}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_m \end{Bmatrix} \quad (10)$$

m = banyak titik simpul pada elemen (e)

Persamaan (10) dapat dituliskan sebagai :

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}] \cdot \{T\} \quad (11)$$

dengan :

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Maka fungsional  $I^{(e)}(T)$  untuk tiap-tiap elemen dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 I^{(e)}(T) = & \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{T\}^t \cdot [B^{(e)}]^t \cdot [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dV - \\
 & \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}] \{T\} dV + \int_{S_3^{(e)}} q [N^{(e)}] \{T\} dS + \int_{S_4^{(e)}} \frac{1}{2} h \{T\}^t \cdot [N^{(e)}]^t \cdot [N^{(e)}] \{T\} dS \\
 & - \int_{S_4^{(e)}} h T \infty [N^{(e)}] \{T\} dS + \int_{S_4^{(e)}} \frac{1}{2} h T^2 \infty dS \quad (12)
 \end{aligned}$$

Diferensiasi tiap-tiap suku pada persamaan (12) di atas dengan aturan diferensiasi, akan memberikan hasil :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{T\}^t [B^{(e)}]^t [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dV &= \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^t [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{T\} dV \\
 \frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}] \{T\} dV &= \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^t dV \\
 \frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_3^{(e)}} q [N^{(e)}] \{T\} dS &= \int_{S_3^{(e)}} q [N^{(e)}]^t dS \\
 \frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_4^{(e)}} \frac{1}{2} h \{T\}^t [N^{(e)}]^t [N^{(e)}] \{T\} dS &= \int_{S_4^{(e)}} h [N^{(e)}]^t [N^{(e)}] \{T\} dS \\
 \frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_4^{(e)}} h T \infty [N^{(e)}] \{T\} dS &= \int_{S_4^{(e)}} h T \infty [N^{(e)}]^t dS \\
 \frac{\partial}{\partial \{T\}} \int_{S_4^{(e)}} \frac{1}{2} h T^2 \infty dS &= 0
 \end{aligned}$$

Sehingga :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I^{(e)}(T)}{\partial \{T\}} = & \left( \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^t [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_4^{(e)}} h [N^{(e)}]^t [N^{(e)}] dS \right) \{T\} \\
 - & \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^t dV + \int_{S_3^{(e)}} q [N^{(e)}]^t dS - \int_{S_4^{(e)}} h T \infty [N^{(e)}]^t dS \quad (13)
 \end{aligned}$$

Persamaan (13) di atas dapat dituliskan :

$$\frac{\partial I^{(e)}(T)}{\partial \{T\}} = [k^{(e)}]\{T\} + \{f^{(e)}\} \quad (14)$$

dengan :

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^t [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_4^{(e)}} h [N^{(e)}]^t [N^{(e)}] dS \quad (15)$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} Q [N^{(e)}]^t dV + \int_{S_3^{(e)}} q [N^{(e)}]^t dS - \int_{S_4^{(e)}} h T_{\infty} [N^{(e)}]^t dS \quad (16)$$

Sekarang persamaan (9) dapat dituliskan :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(T)}{\partial \{T\}} &= \sum_{e=1}^E \frac{\partial I^{(e)}(T)}{\partial \{T\}} \\ &= \sum_{e=1}^E ([k^{(e)}]\{T\} + \{f^{(e)}\}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{atau : } [K] \{T\} = \{F\} \quad (17)$$

$$\text{dengan : } [K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}] \quad (18a)$$

$$\{T\} = [T_1 T_2 \dots T_n]^t ; t = \text{transpose} \quad (18b)$$

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \quad (18c)$$

$n$  = banyak titik simpul pada seluruh domain

Jadi kita lihat bahwa persyaratan bagi peminimuman nilai fungsional I, yaitu

$\frac{\partial I}{\partial \{T\}} = 0$ , menghasilkan suatu sistem persamaan linier seperti yang ditunjukkan oleh

persamaan (17). Dengan menggunakan metoda eliminasi Gauss untuk penyelesaian sistim persamaan linier, dapatlah nilai-nilai temperatur di setiap titik simpul  $\{T\}$  diperoleh.

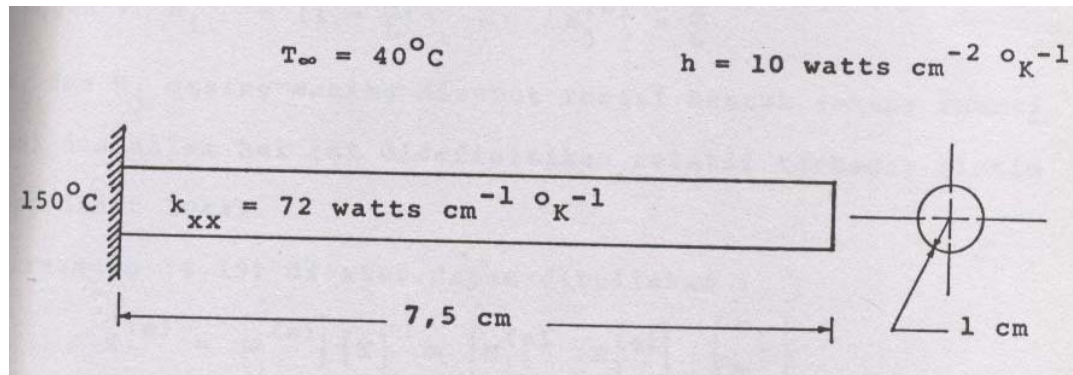
## 2. Konduksi Kalor Satu Dimensi

Untuk memahami penerapan metoda elemen hingga pada masalah konduksi kalo ini, pada pasal ini akan dibahas konduksi kalor pada suatu batang sederhana.

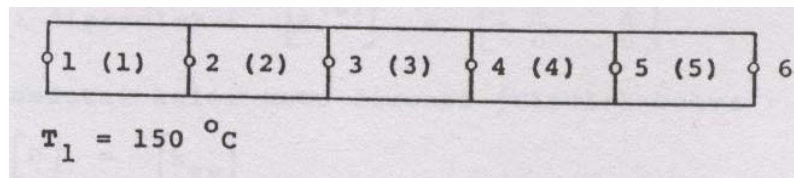
Permasalahan :

Suatu batang sederhana dengan panjang 7,5 cm, berpenampang lingkaran berjari-jari 1 cm, salah satu ujungnya bertemperatur  $150^{\circ}\text{C}$ , sedangkan temperatur

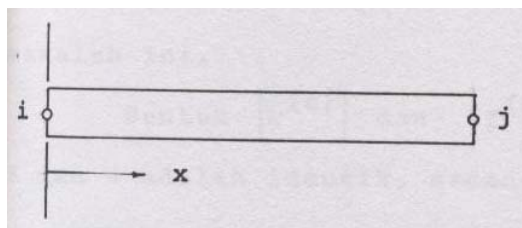
udara di sekelilingnya  $40^{\circ}\text{C}$ . Konveksi kalor terjadi pada seluruh permukaan batang dengan koefisien konveksi kalor  $h = 10 \text{ watt} / \text{cm}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$ . Koefisien konduksi kalor batang  $k_{xx} = 72 \text{ watt} / \text{cm}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$ . Hendak diketahui distribusi temperatur pada batang dalam keadaan setimbang.



Langkah pertama untuk memecahkan masalah tersebut adalah pembagian batang atas elemen-elemen sebagai berikut :



Tinjau satu elemen saja :



Fungsi interpolasi untuk elemen linier satu dimensi ini adalah :

$$\hat{T}^{(e)} = N_i^{(e)}T_i + N_j^{(e)}T_j \tag{19}$$

dengan :  $N_i^{(e)} = \left(1 - \frac{x}{L}\right)$  ,  $N_j^{(e)} = \frac{x}{L}$

$N_i$  dan  $N_j$  masing-masing disebut fungsi bentuk (shape function) dan dalam hal ini didefinisikan relatif terhadap sistim koordinat lokal.

Persamaan (19) di atas dapat dituliskan :

$$\begin{aligned}\hat{T}^{(e)} &= [N^{(e)}]\{T\} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & N_j^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Dari persamaan (10) diperoleh :

$$\{g^{(e)}\} = \left\{ \frac{dT^{(e)}}{dx} \right\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \end{Bmatrix}$$

sehingga diperoleh :  $[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$

Untuk konduksi kalor satu dimensi jelaslah bahwa :

$$[D] = [k_{xx}]$$

sekarang akan kita evaluasi matriks kekakuan elemen  $[k^{(e)}]$  yang pada masalah konduksi kalor ini disebut juga sebagai matriks konduksi elemen dan vektor gaya elemen  $\{f^{(e)}\}$  untuk masalah ini.

Bentuk  $[k^{(e)}]$  dan  $\{f^{(e)}\}$  untuk elemen 1, 2, 3 dan 4 adalah identik, sedangkan untuk elemen ke-5 ada suku tambahan karena konveksi kalor juga terjadi melalui penampang ujung batang.

Perhitungan  $[k^{(e)}]$  dan  $\{f^{(e)}\}$  untuk elemen 1, 2, 3 dan 4 :

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_4^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS$$

$$\begin{aligned}\int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV &= \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [k_{xx}] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A dx \\ &= \frac{Ak_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{S_4^{(e)}} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS &= \int_0^L h \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \left(\frac{x}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \left(\frac{x}{L}\right) \end{bmatrix} P dx \\ &= \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



dengan : P = keliling penampang batang (dianggap konstan)

A = luas penampang batang (dianggap konstan)

$$\text{Jadi : } [k^{(e)}] = \frac{Ak_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Untuk e = 1, 2, 3, 4.

Dari persamaan (16) :

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T Q dV + \int_{S_3^{(e)}} [N^{(e)}]^T q dS - \int_{S_4^{(e)}} [N^{(e)}]^T T_{\infty} h dS$$

$$\int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T Q dV = QA \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{QAL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\int_{S_3^{(e)}} [N^{(e)}]^T q dS = qP \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx = \frac{qPL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\int_{S_4^{(e)}} [N^{(e)}]^T T_{\infty} h dS = \frac{hT_{\infty}PL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Jadi : } \{f^{(e)}\} = - \left( \frac{QAL - qPL + hT_{\infty}PL}{2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

untuk e = 1, 2, 3, 4.

Perhitungan  $[k^{(e)}]$  dan  $\{f^{(e)}\}$  untuk elemen 5 :

Untuk elemen 5 bentuk  $[k^{(e)}]$  nya sama seperti pada persamaan (20), tetapi ada suku tambahan yaitu :

$\int_{S_A} h [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS$ , sedangkan bentuk nya sama seperti pada persamaan (21) tetapi

ada suku tambahan :

$\int_{S_A} [N^{(e)}]^T h T_{\infty} dS$  ;  $S_A$  = permukaan penampang ujung batang.

Pada ujung j elemen 5 :

$$N_i^{(e)} = N_i^{(5)} = 1 - \frac{x}{L} = 1 - \frac{L}{L} = 0$$

$$N_j^{(e)} = N_j^{(5)} = \frac{x}{L} = \frac{L}{L} = 1$$

Maka :

$$\int_{s_A} h [N^{(e)}]^t [N^{(e)}] dS = \int_{s_A} h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} dS = hA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan :

$$\int_{s_A} [N^{(e)}]^t h T_{\infty} dS = \int_{s_A} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} h T_{\infty} dS = h T_{\infty} A \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Dengan demikian :

$$[k^{(5)}] = \frac{Ak_{xx}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + hA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan :

$$\{f^{(5)}\} = - \left( \frac{QAL - qPL + hT_{\infty}PL}{2} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + hT_{\infty}A \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai A,  $k_{xx}$ , L, P, h, T, dan nilai Q=q=0 (sebab tidak ada sumber atau kebocoran kalor dalam batang dan juga tidak ada fluka kalor pada permukaan batang selain yang terjadi oleh konveksi), diperoleh hasil sebagai berikut :

$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = [k^{(3)}] = [k^{(4)}] = \pi \begin{bmatrix} 58 & -43 \\ -43 & 58 \end{bmatrix}$$

$$[k^{(5)}] = \pi \begin{bmatrix} 58 & -43 \\ -43 & 68 \end{bmatrix}$$

$$\{f^{(1)}\} = \{f^{(2)}\} = \{f^{(3)}\} = \{f^{(4)}\} = -\pi \begin{Bmatrix} 600 \\ 600 \end{Bmatrix}$$

$$\{f^{(5)}\} = -\pi \begin{Bmatrix} 600 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

Dari matriks-matriks kekakuan elemen  $[k^{(e)}]$  dan vektor-vektor gaya elemen  $\{f^{(e)}\}$  dapat kita susun matriks kekakuan global  $[K]$  dan vektor gaya global  $\{F\}$ .

Untuk keperluan penyusunan matriks kekakuan global  $[K]$  dan vektor gaya global  $\{F\}$  ini, maka matriks-matriks  $[k^{(e)}]$  dan vektor-vektor  $\{f^{(e)}\}$  untuk keseluruhan elemen haruslah disusun sebagai berikut :

$$[k^{(1)}] = \pi \begin{bmatrix} 58 & -43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -43 & 58 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{f^{(1)}\} = -\pi \begin{Bmatrix} 600 \\ 600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[k^{(2)}] = \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 58 & -43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -43 & 58 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{f^{(2)}\} = -\pi \begin{Bmatrix} 0 \\ 600 \\ 600 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[k^{(3)}] = \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 58 & -43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -43 & 58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{f^{(3)}\} = -\pi \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 600 \\ 600 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[k^{(4)}] = \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 58 & -43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -43 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{f^{(4)}\} = -\pi \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \\ 600 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[k^{(5)}] = \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 58 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -43 & 68 \end{bmatrix} \quad \{f^{(5)}\} = -\pi \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = [k^{(1)}] + [k^{(2)}] + \dots + [k^{(5)}]$$

$$= \pi \begin{bmatrix} 58 & -43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -43 & 116 & -43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -43 & 116 & -43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -43 & 116 & -43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -43 & 116 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -43 & 68 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \{f^{(1)}\} + \{f^{(2)}\} + \dots + \{f^{(5)}\}$$

$$= -\pi \begin{Bmatrix} 600 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

Persamaan matriks global untuk seluruh domain :

$$[K] \{T\} = \{F\}$$

menjadi :

$$\begin{bmatrix} 58 & -43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -43 & 116 & -43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -43 & 116 & -43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -43 & 116 & -43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -43 & 116 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -43 & 68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 600 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

Oleh karena  $T_1$  diketahui sama dengan  $150^\circ\text{C}$ , maka sistim persamaan linier di atas perlu dimodifikasi dengan aturan Dirichlet untuk simpul menjadi sistim persamaan linier baru sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -43 & 116 & -43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -43 & 116 & -43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -43 & 116 & -43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -43 & 116 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -43 & 68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1200 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan (22) dengan metoda eliminasi Gauss memberikan hasil sebagai berikut :

$$T_1 = 150 \quad ^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 88,8364 \quad ^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 61,7447 \quad ^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 49,8237 \quad ^\circ\text{C}$$

$$T_5 = 44,7565 \quad ^\circ\text{C}$$

$$T_6 = 43,0078 \quad ^\circ\text{C}$$

Perhitungan analitis (Kreith, Principles of Heat Transfer) memberikan hasil :

$$T_1 = 150 \quad ^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 89,9 \quad ^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 62,8 \quad ^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 50,6 \quad ^\circ\text{C}$$

$$T_5 = 45,2 \quad ^\circ\text{C}$$

$$T_6 = 43,3 \quad ^\circ\text{C}$$

Dengan membandingkan kedua hasil di atas tampaklah bahwa penyimpangan terbesar yang terjadi hanya sekitar 1,6%, jadi hasil yang diperoleh dengan metoda elemen hingga di atas masih cukup baik. Hasil ini masih dapat diperbaiki dengan memperbanyak jumlah elemen atau dengan memilih fungsi interpolasi yang lebih sesuai. Namun pada jumlah elemen yang cukup besar dibutuhkan program komputer untuk melakukan perhitungan (iterasi).

### 3. Daftar Program

```

10 REM PROGRAM METODA ELEMEN HINGGA UNTUK MASALAH KONDUKSI KALOR
20 REM KETERANGAN SIMBOL-SIMBOL YANG DIGUNAKAN
30 REM A1=BANYAK TITIK SIMPUL
40 REM B1=BANYAK ELEMEN
50 REM C1=BANYAK TITIK SIMPUL YANG FUNGSINYA ATAU NILAINYA
    DIKETAHUI
60 REM NPT(I)=NOMOR SIMPUL DARI TITIK-TITIK SIMPUL YANG FUNGSI ATAU
    NILAINYA DIKETAHUI
70 REM VA(I)=NILAI FUNGSI DARI TITIK-TITIK SIMPUL YANG DIKETAHUI
    FUNGSI ATAU NILAINYA
80 REM X(I),Y(I):KOORDINAT X,Y DARI TITIK SIMPUL I
90 REM NOD(I,J)=KETIGA NOMOR UNTUK SIMPUL PADA ELEMEN I
100 REM XX(I),YY(I):KOORDINAT X,Y DARI KETIGA SIMPUL UNTUK TIAP
    ELEMEN
110 REM A(I),B(I),C(I):DIMENSI KARAKTERISTIK ELEMEN I
120 REM DELTA:LUAS ELEMEN SEGITIGA
130 REM STE(IE,N,N):MASUKKAN KE(M,N) DARI MATRIKS KEKAKUAN ELEMEN
    K DARI ELEMEN IE, DENGAN M=1,2,3 DAN N=1,2,3 ADALAH NOMOR
    PENGENAL SIMPUL
140 REM S(I,J)=ELEMEN KE(I,J) DARI MATRIKS KEKAKUAN GLOBAL K
150 REM RHS(I)=VEKTOR GAYA GLOBAL F
160 REM NSUR(I,J)=MATRIKS NSUR(I,J)
165 REM T(I) = TEMPERATUR PADA TITIK SIMPUL I
170 REM DEKLARASI DIMENSION UNTUK VARIABEL-VARIABEL BERUPA
    MATRIKS (ARRAY)
180 DIM NOD(50,3),X(36),Y(36),NPT(11)
190 DIM VA(11),NSUR(36,7),XX(3),YY(3)
200 DIM A(3),B(3),C(3)
210 DIM STE(50,3,3),S(36,37),RHS(36)
220 DIM T(36)
230 REM PEMASUKKAN DATA BANYAK TITIK SIMPUL,BANYAK ELEMEN DAN
    BANYAK TITIK SIMPUL YANG FUNGSI ATAU NILAINYA DIKETAHUI
240 READ A1,B1,C1
250 REM PEMASUKKAN DATA NOMOR-NOMOR TITIK SIMPUL ELEMEN I
260 FOR II=1 TO B1
270 READ I
280 FOR J=1 TO 3
290 READ NOD(I,J)
300 NEXT J

```

```

310 NEXT I
320 REM PEMASUKKAN DATA KOORDINAT TITIK-TITIK SIMPUL
330 FOR II=1 TO A1
340 READ I,X(I),Y(I)
350 NEXT I
360 REM PEMASUKKAN DATA NOMOR TITIK-TITIK SIMPUL YANG FUNGSINYA
    DIKETAHUI BE-          SERTA NILAI FUNGSINYA
370 FOR I=1 TO C1
380 READ NPT(I),VA(I)
390 NEXT I
400 REM PENCETAKKAN DATA BANYAK TITIK SIMPUL,BANYAK ELEMEN DAN
    BANYAK TITIK SIMPUL YANG FUNGSINYA ATAU NILAINYA DIKETAHUI
410 LPRINT TAB(23)"BANYAK TITIK SIMPUL =" ;A1
420 LPRINT TAB(23)"BANYAK ELEMEN      =" ;B1
430 LPRINT TAB(23)"BANYAK TITIK SIMPUL YANG FUNGSINYA DIKETAHUI
    =" ;C1
440 LPRINT:LPRINT:LPRINT
450 REM PENCETAKKAN DATA NOMOR-NOMOR TITIK SIMPUL ELEMEN I
460 LPRINT TAB(23)"ELEMEN-ELEMEN DAN TITIK-TITIK SIMPULNYA : "
470 LPRINT:LPRINT
480 LPRINT TAB(23)"ELEMEN";TAB(34)"I";TAB(39)"J";TAB(44)"K"
485 LPRINT
490 FOR I=1 TO B1
500 LPRINT TAB(23)I;
510 FOR J=1 TO 3
520 LPRINT TAB(33+(J-1)*5)NOD(I, J);
530 NEXT J
540 LPRINT
550 NEXT I
560 LPRINT:LPRINT:LPRINT:LPRINT:LPRINT
570 REM PENCETAKKAN KOORDINAT TITIK-TITIK SIMPUL
580 LPRINT TAB(23)"KOORDINAT TITIK-TITIK SIMPUL : "
590 LPRINT:LPRINT
600 LPRINT TAB(23)"SIMPUL";TAB(34)"X";TAB(39)"Y"
610 LPRINT
620 FOR I=1 TO A1
630 LPRINT TAB(24)I;TAB(33)X(I);TAB(38)Y(I)
640 NEXT I
650 LPRINT:LPRINT:LPRINT:LPRINT:LPRINT
660 REM PENCETAKKAN NOMOR-NOMOR TITIK SIMPUL YANG FUNGSINYA DIKE-
    TAHUI BESERTA NILAI FUNGSINYA
670 LPRINT TAB(23)"SIMPUL-SIMPUL YANG NILAI FUNGSINYA DIKETAHUI : "
680 LPRINT:LPRINT
690 LPRINT TAB(23)"SIMPUL";TAB(33)"NILAINYA"
695 LPRINT
700 FOR I=1 TO C1
710 LPRINT TAB(24)NPT(I);TAB(34)VA(I)
720 NEXT I
730 LPRINT:LPRINT:LPRINT:LPRINT:LPRINT
740 REM PENYUSUNAN MATRIKS NSUR(I, J)
750 FOR I=1 TO A1

```



```

760 NSUR(I,1)=0
770 NEXT I
780 FOR I=1 TO B1
790 FOR J=1 TO 3
800 LK=NOD(I,J)
810 NSUR(LK,1)=NSUR(LK,1)+1
820 LL=NSUR(LK,1)+1
830 NSUR(LK,LL)=I
840 NEXT J
850 NEXT I
860 REM PENCETAKKAN MATRIKS NSUR(I,J)
880 LPRINT TAB(31)"MATRIKS NSUR(I,J)"
890 LPRINT=LPRINT
900 LPRINT TAB(15)"I";TAB(23)"J=1";TAB(31)"J=2";TAB(39)"J=3";
    TAB(47)"J=4";TAB(55)"J=5";TAB(63)"J=6";TAB(71)"J=7"
905 LPRINT
910 FOR I=1 TO A1
920 LPRINT TAB(14)I;
930 FOR J=1 TO 7
940 LPRINT TAB(23+(J-1)*8)NSUR(I,J);
950 NEXT J
960 LPRINT
970 NEXT I
980 LPRINT=LPRINT=LPRINT=LPRINT=LPRINT
990 REM PERHITUNGAN MATRIKS KEKAKUAN ELEMEN k UNTUK SEMUA ELEMEN
    DAN HASILNYADISIMPAN DALAM MEMORI
1000 FOR I=1 TO B1
1010 FOR J=1 TO 3
1020 LK=NOD(I,J)
1030 XX(J)=X(LK)
1040 YY(J)=Y(LK)
1050 NEXT J
1060 FOR J=1 TO 3
1070 LK=J+1
1080 LL=J+2
1090 IF (LK-3)=0 THEN LL=1:GOTO 1110
1100 IF (LK-3)>0 THEN LK=1:LL=2
1110 A(J)=XX(LK)*YY(LL)-XX(LL)*YY(LK)
1120 B(J)=YY(LK)-YY(LL)
1130 C(J)=XX(LL)-XX(LK)
1140 NEXT J
1150 DELTA=(C(3)*B(2)-C(2)*B(3))
1160 FOR IR=1 TO 3
1170 FOR IC=1 TO 3
1180 STE(I,IR,IC)=(B(IR)*B(IC)+C(IR)*C(IC))/(4*DELTA)
1190 NEXT IC
1200 NEXT IR
1210 NEXT I

```



```

1220 REM PENYUSUNAN MATRIKS KEKAKUAN GLOBAL K DARI MATRIKS KEKA-
      KUAN ELEMEN k
1230 FOR I=1 TO A1
1240 FOR J=1 TO A1
1250 S(I, J)=0
1260 NEXT J
1270 RHS(I)=0
1280 NEXT I
1290 FOR NADE=1 TO A1
1300 FOR I=1 TO C1
1310 IF NADE=NPT(I) THEN S(NADE, NADE)=1:RHS(NADE)=VA(I):GOTO 1470
1320 NEXT I
1330 IO=NSUR(NADE, 1)
1340 IEL=IO+1
1350 FOR ITEL=2 TO IEL
1360 LEL=NSUR(NADE, ITEL)
1370 FOR I=1 TO 3
1380 IR=I
1390 IF NOD(LEL, I)=NADE THEN GOTO 1420
1400 NEXT I
1410 LPRINT "PENOMORAN SIMPUL ELEMEN SALAH"
1420 FOR IC=1 TO 3
1430 IK=NOD(LEL, IC)
1440 S(NADE, IK)=S(NADE, IK)+STE(LEL, IR, IC)
1450 NEXT IC
1460 NEXT ITEL
1470 NEXT NADE
1480 REM PENCETAKKAN MATRIKS KEKAKUAN GLOBAL K DAN VEKTOR GAYA
      GLOBAL F
1490 LPRINT TAB(7)"MATRIKS KEKAKUAN GLOBAL K : "
1500 LPRINT:LPRINT:LPRINT CHR$(29)
1510 FOR I=1 TO A1
1520 FOR J=1 TO A1
1530 IF J=1 THEN LPRINT TAB(10)S(I, J);
1540 LPRINT S(I, J);
1550 NEXT J
1560 LPRINT
1570 NEXT I
1580 LPRINT:LPRINT:LPRINT:LPRINT:LPRINT:LPRINT CHR$(30)
1590 LPRINT TAB(23)"VEKTOR GAYA GLOBAL F : "
1600 LPRINT:LPRINT
1610 FOR I=1 TO A1
1620 LPRINT TAB(48)RHS(I)
1630 NEXT I

```

```

1640 REM PENYELESAIAN PERSAMAAN MATRIKS GLOBAL DENGAN METODA ELIMI-
      NASI GAUSS
1650 FOR I=1 TO A1
1660 S(I,A1+1)=RHS(I)
1670 NEXT I
1680 FOR K=1 TO A1-1
1690 Z=S(K,K)
1700 FOR J=K TO A1+1
1710 S(K,J)=S(K,J)/Z
1720 NEXT J
1730 FOR I=K+1 TO A1
1740 Q=S(I,K)
1750 FOR J=K TO A1+1
1760 S(I,J)=S(I,J)-Q*S(K,J)
1770 NEXT J
1780 NEXT I
1790 NEXT K
1800 T(A1)=S(A1,A1+1)/S(A1,A1)
1810 FOR K=A1-1 TO 1 STEP -1
1820 T(K)=S(K,A1+1)
1830 FOR J=K+1 TO A1
1840 T(K)=T(K)-S(K,J)*T(J)
1850 NEXT J
1860 NEXT K
1870 REM PENCETAKKAN HASIL BERUPA NILAI-NILAI TEMPERATUR PADA TI-
      TIK-TITIK SIMPUL DOMAIN
1875 LPRINT TAB(23)"NILAI-NILAI TEMPERATUR PADA TITIK-TITIK SIM-
      PUL : "
1878 LPRINT:LPRINT
1880 FOR K=1 TO A1
1890 LPRINT TAB(23)"T (";K;TAB(30)")= ";T(K)
1900 NEXT K
1910 STOP
1915 REM DATA BANYAK TITIK SIMPUL,BANYAK ELEMEN DAN BANYAK TITIK
      SIMPUL YANG FUNGSI ATAU NILAINYA DIKETAHUI (MERUPAKAN
      SYARAT BATAS DIRICHLET)

```

#### 4. Daftar Pustaka

1. Huebner, Kenneth H., Thornton, Earl A., "The Finite Element Method For Engineers", second edition, Wiley Interscience, New York, 1982.
2. Segerlind, L.J., "Applied Finite Element Analysis", John Wiley, New York, 1976.
3. Norrie, D.H., De Vries, G., "An Introduction To Finite Element Analysis", Academic Press, Inc., New York, 1978.