

## THE ASSIGNMENT PROBLEM

Dahlia Br Ginting

Sekolah Tinggi Manajemen Informatika dan Komputer LIKMI  
Jl. Ir. Juanda 96 Bandung 40132

E-mail : Carlo2007@telkom.net

---

### Abstrak

Masalah penugasan meliputi antara lain pemberian beban kerja pada mesin, penugasan tenaga penjual ke daerah tertentu, pembagian beberapa pekerjaan ke beberapa karyawan. Asumsi yang dipakai pada masalah penugasan ini adalah satu pekerjaan hanya diperuntukkan bagi satu dan hanya satu orang atau mesin. Tujuan yang ingin dicapai dalam masalah penugasan ini adalah mencari penugasan yang mengoptimalkan kriteria tertentu seperti meminimumkan biaya atau waktu dan memaksimumkan keuntungan.

**Kata-kata kunci :** assignment, maksimasi, minimasi, solusi optimal.

---

### 1. PENDAHULUAN

Tipe khusus program linier yang paling penting selain persoalan transportasi adalah persoalan penugasan (*assignment*). Dalam dunia usaha (bisnis) dan industri, manajemen sering menghadapi masalah-masalah yang berhubungan dengan penugasan optimal dari bermacam-macam sumber yang produktif atau personalia yang mempunyai tingkat efisiensi yang berbeda-beda untuk tugas-tugas yang berbeda-beda pula. Metoda hungaria adalah salah satu dari beberapa teknik pemecahan yang tersedia untuk masalah-masalah penugasan.

Untuk dapat menerapkan metode hungarian, jumlah sumber-sumber yang ditugaskan harus sama persis dengan jumlah tugas yang akan diselesaikan. Selain itu, setiap sumber harus ditugaskan hanya untuk satu tugas.

### 2. THE ASSIGNMENT PROBLEM

Masalah penugasan dapat dinyatakan secara matematis dalam suatu bentuk *linear programming* sebagai berikut:

Minimumkan (maksimumkan):

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

Dengan batasan:

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = \sum_{j=1}^n X_{ij} = 1$$

dan  $X_{ij} \geq 0$ , dimana  $C_{ij}$  adalah tetapan yang telah diketahui.

Sebagai ilustrasi diberikan contoh berikut:

Suatu perusahaan memiliki 3 orang karyawan dan tiga macam pekerjaan. Perusahaan ingin menugaskan ketiga karyawannya untuk ketiga jenis pekerjaan tersebut. Waktu penyelesaian pekerjaan (hari) oleh masing-masing karyawan untuk masing-masing pekerjaan diberikan pada tabel berikut.

Karena masing-masing pekerjaan memiliki prioritas yang sama, maka bagaimana menugaskan ketiga orang karyawan tersebut ke satu dan hanya satu pekerjaan agar total waktu penyelesaian pekerjaan menjadi minimum.

| Karyawan | Pekerjaan |   |    |
|----------|-----------|---|----|
|          | A         | B | C  |
| P        | 10        | 5 | 8  |
| Q        | 6         | 7 | 11 |
| R        | 4         | 9 | 12 |

Jika P diberi kesempatan untuk memilih pekerjaan terlebih dahulu, maka akan ada 3 pilihan pekerjaan, kemudian jika Q diberi kesempatan memilih, maka hanya ada 2 pilihan pekerjaan. Selanjutnya R tidak memiliki kesempatan untuk memilih dan mau tidak mau haruslah menyelesaikan pekerjaan yang tidak dipilih oleh P dan Q. Sehingga secara keseluruhan ada  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  kemungkinan pembagian kerja seperti yang ditunjukkan pada tabel berikut:

| Karyawan | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| P        | A(10)     | A(10)     | B(5)      | B(5)      | C(8)      | C(8)      |
| Q        | B(7)      | C(11)     | A(6)      | C(11)     | A(6)      | B(7)      |
| R        | C(12)     | B(9)      | C(12)     | A(4)      | B(9)      | A(4)      |
| Total    | <b>29</b> | <b>30</b> | <b>23</b> | <b>20</b> | <b>23</b> | <b>19</b> |

Total waktu penyelesaian minimum adalah 19 hari bila P menangani pekerjaan C, Q menangani pekerjaan B dan R menangani pekerjaan A.

## METODA HUNGARIAN

Metoda yang efisien untuk memecahkan masalah “assignment” adalah metoda **Hungarian**.

Kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan metode hungaria.

| Karyawan<br>(Baris) | Pekerjaan (kolom) |   |    |
|---------------------|-------------------|---|----|
|                     | A                 | B | C  |
| P                   | 10                | 5 | 8  |
| Q                   | 6                 | 7 | 11 |
| R                   | 4                 | 9 | 12 |

Langkah-langkahnya:

1. Kurangkan setiap elemem pada masing-masing baris dengan nilai terkecil pada masing-masing baris tersebut. Kemudian kurangi setiap elemen pada masing-masing kolom dengan nilai terkecil pada masing-masing kolom tersebut.

| Karyawan | Pekerjaan |   |   |
|----------|-----------|---|---|
|          | A         | B | C |
| P        | 5         | 0 | 3 |
| Q        | 0         | 1 | 5 |
| R        | 0         | 5 | 8 |



| Karyawan | Pekerjaan |   |   |
|----------|-----------|---|---|
|          | A         | B | C |
| P        | 5         | 0 | 0 |
| Q        | 0         | 1 | 2 |
| R        | 0         | 5 | 5 |

2. Cari jumlah minimum garis lurus sejajar baris dan kolom ( yang melalui semua nol pada matrix). Jika jumlah garis ini sama dengan banyak baris (atau kolom) matrix, maka solusi optimal dapat diperoleh. Jika jumlah garis ini lebih kecil, lanjut ke langkah 3.

| Karyawan | Pekerjaan    |   |   |
|----------|--------------|---|---|
|          | A            | B | C |
| P        | <del>5</del> | 0 | 0 |
| Q        | 0            | 1 | 2 |
| R        | 0            | 5 | 5 |

3. Kurangi nilai setiap elemen matrix yang tidak dilalui garis dengan nilai elemen matrix yang tidak dilalui garis terkecil, dan tambahkan nilai terkecil ini pada setiap nilai pada perpotongan garis.

Lanjutkan ke langkah 2

| Karyawan | Pekerjaan |   |   |
|----------|-----------|---|---|
|          | A         | B | C |
| P        | 6         | 0 | 0 |
| Q        | 0         | 0 | 1 |
| R        | 0         | 4 | 4 |

Solusi optimum diperoleh dengan cara mencari baris atau kolom yang hanya memiliki satu nilai nol. Beri tanda baris atau kolom tersebut lalu coretlah baris atau kolom tersebut. Untuk permasalahan di atas solusi optimumnya adalah:

| Karyawan | Pekerjaan |   |   |
|----------|-----------|---|---|
|          | A         | B | C |
| P        | 6         | 0 | 0 |
| Q        | 0         | 0 | 1 |
| R        | 0         | 4 | 4 |

Jadi karyawan P menangani pekerjaan C, Q menangani B dan R menangani A dengan total waktu penyelesaian 19 hari.

### **BARIS ATAU KOLOM BONEKA (DUMMY ROWS / COLUMNS)**

Metoda Hungarian dengan reduksi matrix yang telah dibahas sebelumnya berlaku jika banyak baris sama dengan banyak kolom. Jika jumlah baris tidak sama dengan jumlah kolom, maka sebelum menggunakan metode hungarian ini, kita tambahkan baris atau kolom baru yang disebut baris boneka atau kolom boneka. Gunakan nilai nol sebagai elemen bagi baris atau kolom boneka tersebut.

#### **Contoh:**

Jika pada persoalan di atas, ternyata ada karyawan keempat S, seorang karyawan tambahan yaitu Alloy Christian dengan waktu penyelesaian pekerjaan berturut-turut untuk pekerjaan A = 5, untuk pekerjaan B = 13 dan pekerjaan C = 9, sedangkan banyak pekerjaan hanya ada 3 .

Bagaimana alokasi penugasannya ?

| Karyawan | Pekerjaan |    |    |
|----------|-----------|----|----|
|          | A         | B  | C  |
| P        | 10        | 5  | 8  |
| Q        | 6         | 7  | 11 |
| R        | 4         | 9  | 12 |
| S        | 5         | 13 | 9  |

Karena jumlah karyawan lebih banyak dari jumlah pekerjaan, maka kita tambahkan satu pekerjaan D sebagai kolom boneka, dengan waktu penyelesaian pekerjaan bisa dipilih berapapun asalkan sama untuk setiap karyawan (biasanya dipilih nol).

| Karyawan | Pekerjaan |    |    |   |
|----------|-----------|----|----|---|
|          | A         | B  | C  | D |
| P        | 10        | 5  | 8  | 0 |
| Q        | 6         | 7  | 11 | 0 |
| R        | 4         | 9  | 12 | 0 |
| S        | 5         | 13 | 9  | 0 |

Kemudian lakukan metode hungaria untuk mendapatkan penugasan yang optimum

| Karyawan | Pekerjaan    |              |              |              |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|          | A            | B            | C            | D            |
| P        | <del>6</del> | <del>0</del> | <del>0</del> | <del>0</del> |
| Q        | 2            | 2            | 3            | 0            |
| R        | <del>0</del> | 4            | 4            | <del>0</del> |
| S        | 1            | 8            | 1            | 0            |

Jumlah minimum garis yang melalui semua titik nol telah sama dengan jumlah baris atau kolom, berarti solusi optimum telah tercapai yaitu:

| Karyawan | Pekerjaan |   |   |   |
|----------|-----------|---|---|---|
|          | A         | B | C | D |
| P        | 6         | 0 | 0 | 1 |
| Q        | 1         | 1 | 2 | 0 |
| R        | 0         | 4 | 4 | 1 |
| S        | 0         | 7 | 0 | 0 |

Jadi: P melayani pekerjaan B : 5 hari  
 R melayani pekerjaan A : 4 hari  
 S melayani pekerjaan C : 9 hari  
 Total waktu penyelesaian : 18 hari  
 Dan Q tidak menangani pekerjaan apapun.

**Persoalan “Assignment” dengan tujuan maksimasi.**

**Langkah-langkahnya:**

1. Buat *matrix opportunity losses* (matrix hilangnya kesempatan) dari matrix semula, dengan cara mencari selisih antara elemen masing-masing kolom matrix awal dengan elemen terbesar dari masing-masing kolom tersebut.

2. Terapkan metoda Hungarian seperti kasus minimasi pada *matrix opportunity losses*nya.

Misalkan suatu kantor akuntan memiliki 4 auditor yang akan ditugaskan untuk menangani 4 orang klien. Keuntungan yang akan diperoleh perusahaan untuk klien bergantung kepada auditor mana yang akan ditugaskan (berhubungan dengan kecepatan auditor untuk menyelesaikan pekerjaannya). Data-data keuntungan (dalam juta Rp) yang dicapai perusahaan untuk setiap auditor dan klien diberikan pada tabel berikut:

| Auditor | Klien |   |   |   |
|---------|-------|---|---|---|
|         | A     | B | C | D |
| P       | 6     | 5 | 8 | 7 |
| Q       | 2     | 7 | 6 | 5 |
| R       | 7     | 8 | 3 | 9 |
| S       | 2     | 4 | 6 | 8 |

Masalah maksimasi sama dengan masalah minimasi dari *matrix opportunity losses* dari matrik awal. *Matrix opportunity losses* diperoleh dengan cara mencari selisih mutlak antara elemen masing-masing kolom matriks asal dengan elemen terbesar dari masing-masing kolom tersebut.

Untuk permasalahan di atas, *matrix opportunity losses*nya adalah:

| Auditor | Klien |   |   |   |
|---------|-------|---|---|---|
|         | A     | B | C | D |
| P       | 1     | 3 | 0 | 2 |
| Q       | 5     | 1 | 2 | 4 |
| R       | 0     | 0 | 5 | 0 |
| S       | 5     | 4 | 2 | 1 |

Kemudian kita lakukan langkah-langkah metode hungaria pada *matrix opportunity losses* di atas, sehingga diperoleh:

|   | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| P | 1 | 3 | 0 | 2 |
| Q | 5 | 1 | 2 | 3 |
| R | 0 | 0 | 5 | 0 |
| S | 4 | 3 | 1 | 0 |

Karena sudah ada empat buah garis vertikal dan horisontal yang melalui semua nilai nol maka solusi optimum telah diperoleh, yaitu:

|          | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>P</b> | 0        | 3        | 0        | 1        |
| <b>Q</b> | 3        | 0        | 1        | 2        |
| <b>R</b> | 0        | 1        | 6        | 0        |
| <b>S</b> | 4        | 4        | 2        | 0        |

Kesimpulan:

|                    |               |
|--------------------|---------------|
| P melayani klien C | : Rp. 8 juta  |
| Q melayani klien B | : Rp. 7 juta  |
| R melayani klien A | : Rp. 7 juta  |
| S melayani klien D | : Rp. 8 juta  |
| Total keuntungan   | : Rp. 30 juta |

### **Penanganan Assignment yang tidak diterima.**

Misalkan pada persoalan di atas terdapat kendala bahwa auditor P tidak dapat menangani klien C dan auditor S tidak dapat menangani klien D. Bagaimana pengalokasian pekerjaan yang optimum sekarang ?

### **Cara penyelesaiannya:**

Masukkan  $(-M)$  untuk kasus maksimasi dan  $(+M)$  untuk kasus minimasi sebagai elemen matrix pada perpotongan baris dan kolom yang merupakan kombinasi yang tidak dapat dilakukan.

(  $M$  = bilangan yang sangat besar)

Karena permasalahan di sini adalah maksimasi keuntungan, maka kita masukkan  $-M$  pada sel P-C dan S-D (dengan harapan bahwa sel P-C dan S-D tidak akan dipilih karena keuntungannya negatif)

Matriks awalnya dan matriks opportunity lossesnya menjadi:

| <b>Auditor</b> | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>D</b> |
|----------------|----------|----------|----------|----------|
| <b>P</b>       | 6        | 5        | $-M$     | 7        |
| <b>Q</b>       | 2        | 7        | 6        | 5        |
| <b>R</b>       | 7        | 8        | 3        | 9        |
| <b>S</b>       | 2        | 4        | 6        | $-M$     |



| Auditor | A | B | C | D |
|---------|---|---|---|---|
| P       | 1 | 3 | M | 2 |
| Q       | 5 | 1 | 0 | 4 |
| R       | 0 | 0 | 3 | 0 |
| S       | 5 | 4 | 0 | M |

Langkah-langkah metode hungaria akan menghasilkan:

| Auditor | A | B | C | D |
|---------|---|---|---|---|
| P       | 0 | 2 | M | 1 |
| Q       | 5 | 1 | 0 | 4 |
| R       | 0 | 0 | 3 | 0 |
| S       | 5 | 4 | 0 | M |



| Auditor | A | B | C | D |
|---------|---|---|---|---|
| P       | 0 | 1 | M | 0 |
| Q       | 5 | 0 | 0 | 3 |
| R       | 1 | 0 | 4 | 0 |
| S       | 5 | 3 | 0 | M |

Diperoleh solusi optimumnya:

| Auditor | A | B | C | D |
|---------|---|---|---|---|
| P       | 0 | 1 | M | 0 |
| Q       | 5 | 0 | 0 | 3 |
| R       | 1 | 0 | 4 | 0 |
| S       | 5 | 3 | 0 | M |

Kesimpulan:

|                    |               |
|--------------------|---------------|
| P melayani klien A | : Rp. 6 juta  |
| Q melayani klien B | : Rp. 7 juta  |
| R melayani klien D | : Rp. 9 juta  |
| S melayani klien C | : Rp. 6 juta  |
| Total keuntungan   | : Rp. 28 juta |

Jika kasusnya minimasi, masukkan nilai +M sebagai elemen matriks pada perpotongan baris dan kolom yang merupakan kombinasi yang tidak dapat dilakukan.

### 3. KESIMPULAN

Cara penyelesaian dengan menuliskan semua kemungkinan yang bisa terjadi hanya cocok jika jumlah karyawan dan jumlah pekerjaan tidaklah banyak, tetapi jika jumlah

pekerjaan dan karyawan banyak, maka cara seperti ini tidaklah efisien. Jadi, alternatif lain untuk penyelesaian masalah penugasan ini ialah dengan menggunakan metode Hungaria tersebut. Ciri khas persoalan penugasan ialah solusi optimum akan tetap sama bila suatu konstanta ditambahkan atau dikurangkan kepada baris atau kolom yang mana pun dari matriks ongkosnya.

#### **4. DAFTAR PUSTAKA**

1. Rodney D. Johnson & Bernard R. Siskin, *Quantitative Techniques for Business Decision*
2. Drs. Pangestu Subagyo, M.B.A., cs., *Dasar-dasar Operations Research*. BPFE, Yogyakarta.
3. Tjutju Tarliah Dimiyanti – Ahmad Dimiyanti. *Operations Research*. Sinar Baru Algensindo.